

Krzysztof JEMIELNIAK¹
Miroslaw NEJMAN¹
Dominika ŚNIEGULSKA-GRĄDZKA¹

ANALITYCZNE I NUMERYCZNE WYZNACZANIE GRANICY STABILNOŚCI PRZY TOCZENIU

W artykule przedstawiono porównanie metod wyznaczania granicy stabilności dla układów obrabiarka - uchwyt - przedmiot – narzędzie, modelowanych jako układy wielomodalne o dwóch stopniach swobody. Omówiono metody obliczeniowe, opisano wyniki testowania oprogramowania opartego o różne algorytmy. Wykazano, że największą zaletą metody analitycznej jest szybkość działania algorytmu, natomiast wadą stopień złożoności zapisu dla większej liczby stopni swobody. Z kolei układy o większej liczbie stopni swobody łatwiej jest analizować metodą numeryczną, ze względu na uniwersalność zapisu macierzowego. Wadą tej metody jest dłuższy czas obliczeń, w porównaniu do metody analitycznej.

1. WSTĘP

Jakość obrabiarki oceniana jest na podstawie dokładności jej pracy, wydajności, oddziaływania na otoczenie i niezawodności. Jednym z czynników mających wpływ na wymienione kryteria oceny jest podatność dynamiczna opisująca zachowanie się obrabiarki pod działaniem obciążeń dynamicznych [1],[2].

Obrabiarka wraz z uchwytem, przedmiotem obrabianym i narzędziem jest złożonym układem masowo-sprężysto-tłumiącym (MST) o wielu stopniach swobody, który pobudzany jest do drgań działaniem obciążeń dynamicznych. W pewnych warunkach ich rozwój prowadzić może do utraty stabilności i wystąpienia drgań samowzbudnych [1-4]. Rozwój drgań samowzbudnych jest zjawiskiem niekorzystnym, prowadzącym m.in. do znacznego pogorszenia jakości obrabianych powierzchni, szybszego zużycia narzędzi jak również samej obrabiarki oraz większego natężenia hałasu.

Charakterystyczne dla drgań samowzbudnych jest to, że pomiędzy układem masowo-sprężysto-tłumiącym (tu układem OUPN) i procesem roboczym (tu procesem skrawania) występuje sprzężenie zwrotne powodujące, że zmienna siła wywołująca ruch drgający pochodzi od samych drgań. Układ OUPN sprzężony z procesem skrawania nazywany bywa dynamicznym układem OUPN (DU-OUPN) [2]. Model tego układu opisany równaniami

¹ Zakład Automatykacji, Obrabiarek i Obróbki Skrawaniem, Wydział Inżynierii Produkcji Politechniki Warszawskiej

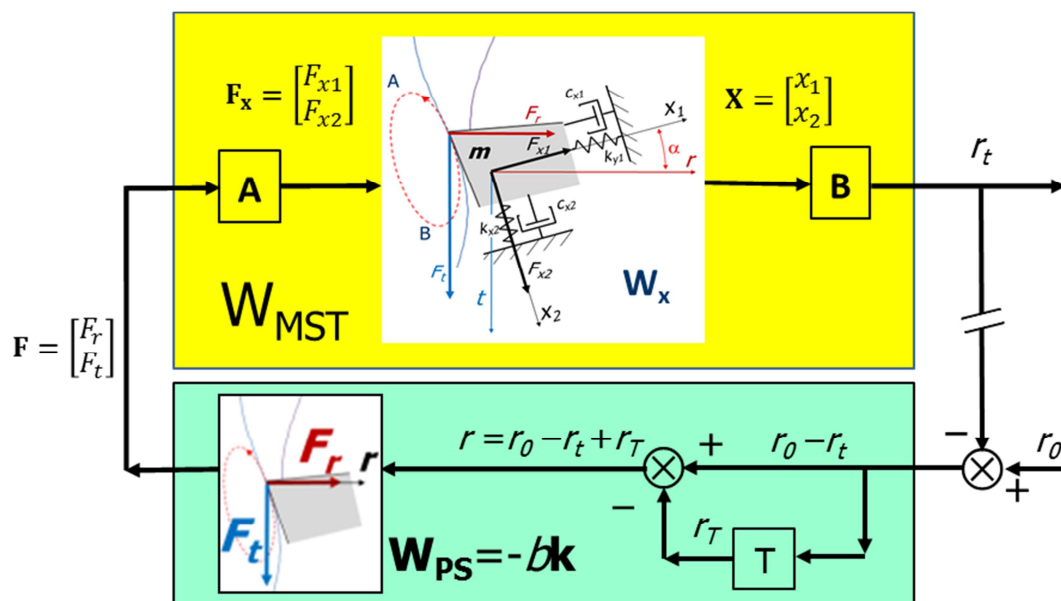
różniczkowymi stanowi podstawę do analizy stabilności, czyli poszukiwania granicznej głębokości skrawania w funkcji prędkości obrotowej wrzeciona obrabiarki.

W niniejszym, pierwszym z dwóch artykułów przedstawiono dwie metody rozwiązywania tych równań – analityczną oraz numeryczną. W drugim artykule przedstawiono poszukiwanie granicy stabilności metodą symulacji numerycznej.

2. ANALIZA STABILNOŚCI DU-OUPN O DWÓCH STOPNIACH SWOBODY

Układ OUPN jest układem masowo-sprężysto-tłumiącym (MST) o bardzo złożonej strukturze i wielu stopniach swobody [2],[4-5]. Taki układ jak przedstawiono na rys. 1 można opisać, jako układ wielomodalny o dwóch kierunkach, uwzględniający sprzężenie przez przemieszczenie oraz reprodukcję drgań.

Schemat blokowy wielomodalnego DU-OUPN o dwóch stopniach swobody x_1 i x_2 , obróconych względem kierunku prostopadłego do prędkości skrawania r o kąt α przedstawiono na rys. 1. W jego skład wchodzi układ OUPN, czyli MST, proces skrawania, blok opóźnienia czasowego oraz wzajemne powiązania, sygnały wejściowe i wyjściowe dla każdego z tych elementów [5].



Rys. 1. Schemat dynamicznego układu OUPN o dwóch stopniach swobody przy toczeniu
Fig. 1. Diagram of dynamic structure OUPN with two degrees of freedom in turning

2.1. MODEL WIELOMODALNEGO UKŁADU MST O 2 STOPNIACH SWOBODY

Sygnałami wejściowymi dla układu MST są siły skrawania promieniowa (F_r) i styczna (F_t), które w zapisie macierzowym można przedstawić jako:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_r \\ F_t \end{bmatrix} \quad (1)$$

Siły F_{x1} i F_{x2} działające wzdłuż głównych osi sztywności x_1 i x_2 otrzymuje się rzutując siły skrawania F_t i F_r na te kierunki:

$$\mathbf{F}_x = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_r \\ F_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_r \\ F_t \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{F} \quad (2)$$

$$\text{gdzie } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Sygnałami wyjściowymi są przemieszczenia wzdłuż kierunku prostopadłego do prędkości skrawania, decydujące o siłach skrawania. Otrzymać je można rzutując przemieszczenia wzdłuż osi x_1 i x_2 na kierunek r :

$$r = \mathbf{B}\mathbf{X} \quad (4)$$

$$\text{gdzie } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Funkcja przejścia układu MST we współrzędnych x_1, x_2 ma postać:

$$\mathbf{W}_x = \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{F}_x} = \begin{bmatrix} w_{11} & 0 \\ 0 & w_{22} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\text{gdzie: } w_{11} = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} x_{1i}}{F_{x1}} = \sum_{i=1}^{N_1} \frac{1}{s^2 m_{1i} + s c_{1i} + k_{1i}}; \quad w_{22} = \frac{\sum_{i=1}^{N_2} x_{2i}}{F_{x2}} = \sum_{i=1}^{N_2} \frac{1}{s^2 m_{2i} + s c_{2i} + k_{2i}} \quad (7)$$

$m_{1i}, c_{1i}, k_{1i}, m_{2i}, c_{2i}, k_{2i}$, - odpowiednio modalne masy, współczynniki tłumienia i sztywności la poszczególnych (i -tych) postaci drgań w kierunkach x_1 i x_2 ,
 N_1, N_2 – liczby postaci drgań w kierunkach x_1 i x_2 .

Do prowadzenia analizy stabilności wygodnie jest określić funkcję przejścia układu MST we współrzędnych procesu skrawania r i t :

$$\mathbf{W}_{\text{MST}} = \mathbf{B}\mathbf{W}_x\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{11} & 0 \\ 0 & w_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\text{czyli: } \mathbf{W}_{\text{MST}} = [w_r \quad w_t] = [a_{11}^2 w_{11} + a_{21}^2 w_{22} \quad a_{11} a_{12} w_{11} + a_{21} a_{22} w_{22}] \quad (9)$$

2.2. DYNAMICZNA CHARAKTERYSTYKA PROCESU SKRAWANIA

Przemieszczenia i prędkości przemieszczeń w kierunku r powodują zmiany przekroju warstwy skrawanej i chwilowego kierunku skrawania, pociągając za sobą zmiany sił

skrawania opisane tzw. dynamiczną charakterystyką sił skrawania [2], [6-8]:

$$\begin{cases} F_r = b[k_{rd}(-r_t + r_T) - h_{er}\dot{r}_t] \\ F_t = b[k_{td}(-r_t + r_T) - h_{et}\dot{r}_t] \end{cases} \quad (10)$$

gdzie $r_t = r(t)$, $r_T = r(t - T)$ – tzw. modulacja wewnętrzna i zewnętrzna grubości warstwy skrawanej, b – szerokość warstwy skrawanej, k_{rd} , k_{td} – dynamiczne opory właściwe skrawania, h_{er} , h_{et} – współczynniki tłumienia procesu skrawania. Dynamiczne opory właściwe skrawania można określić wychodząc z zależności sił skrawania przypadającą na 1 mm szerokości warstwy skrawanej, od grubości warstwy skrawanej:

$$\frac{F_r}{b} = C_r h^{1-m_r}; \quad \frac{F_t}{b} = C_t h^{1-m_t} \quad (11)$$

przez ich linearyzację w punkcie pracy ($h=h_0$)

$$k_{rd} = \left. \frac{dF_r}{dh} \right|_{h=h_0} = (1 - m_r) C_r h_0^{-m_r} \quad (12)$$

gdzie C_r , m_r , C_t , m_t , - stałe wyznaczone doświadczalnie.

Tłumienie procesu skrawania może być modelowane w różny sposób np. [7-8] lub wyznaczone doświadczalnie.

Funkcja przejścia procesu skrawania w postaci może być, zatem zapisana w postaci:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_r \\ F_t \end{bmatrix} = -b \begin{bmatrix} k_{rd}(1 - e^{-sT}) + sh_{er} \\ k_{td}(1 - e^{-sT}) + sh_{et} \end{bmatrix} r = -b\mathbf{k}r \quad (13)$$

gdzie:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{rd}(1 - e^{-sT}) + sh_{er} \\ k_{td}(1 - e^{-sT}) + sh_{et} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{rr} \\ k_{tr} \end{bmatrix} \quad (14)$$

2.3. WYZNACZANIE GRANICY STABILNOŚCI W FUNKCJI CZĘSTOTLIWOŚCI DRGAŃ

Funkcja przejścia układu otwartego ma postać:

$$\mathbf{W}_o = \mathbf{W}_{MST}\mathbf{F} = -b\mathbf{W}_{MST}\mathbf{k} = -b[w_r \quad w_t] \begin{bmatrix} k_{rr} \\ k_{tr} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{W}_o = -b(w_r k_{rr} + w_t k_{tr}) \quad (16)$$

Transmitancja układu zamkniętego:

$$\mathbf{W}_z = \frac{\mathbf{W}_o}{1 - \mathbf{W}_o} \quad (17)$$

gdzie \mathbf{I} – jednostkowa macierz diagonalna.

Analiza stabilności polega na poszukiwaniu takich wartości szerokości warstwy skrawanej b_{lim} , powyżej której występują drgania samowzbudne. Dla $b=b_{lim}$ mianownik równania (17) przyjmuje wartość zero. A zatem poszukuje się pierwiastków równania charakterystycznego:

$$\mathbf{I} - \mathbf{W}_o = \mathbf{I} + b_{lim} \mathbf{W}_{MST} \mathbf{k} = \mathbf{1} + b_{lim}(w_r k_{rr} + w_t k_{tr}) = 0 \quad (18)$$

Zmiennymi niezależnymi w powyższym równaniu są częstość drgań samowzbudnych ω oraz kąt przesunięcia fazowego między wewnętrzną, a zewnętrzną modulacją grubości warstwy skrawanej φ . Wielkością poszukiwaną jest zależność granicznej szerokości warstwy skrawanej od częstości drgań i przesunięcia fazowego, spełniającej równanie (18), czyli tzw. „worek matka” – $b_{lim}(\omega, \varphi)$. Ponieważ przesunięcie fazowe φ jest także funkcją częstości drgań ω , więc najpierw wyznaczana jest zależność $\varphi(\omega)$. Możliwe częstotliwości drgań samowzbudnych leżą powyżej jednej częstotliwości drgań własnych układu MST: $\omega_{0ij} = \sqrt{k_{ij}/m_{ij}}$, gdzie k_{ij} i m_{ij} sztywności i masy modalne (patrz zależność 7). Można przyjąć, że nie przekraczają one $1.5\omega_{0ij}$. Dlatego też wyznacza się potencjalne zakresy częstotliwości drgań samowzbudnych biorąc pod uwagę wszystkie postaci drgań i poszukuje kątów φ spełniających równanie (18) dla wszystkich z nich. Worek matkę można wyznaczyć analitycznie lub numerycznie.

Analityczne wyznaczanie worka matki

W metodzie analitycznej należy znaleźć rozwiązanie równań macierzowych, polegające na wyznaczeniu z części urojonej równania (18) kąta φ będącego przesunięciem fazowym między zewnętrzną i wewnętrzną modulacją grubości warstwy skrawanej oraz podstawieniu go do części rzeczywistej celem obliczenia b – granicznej szerokości warstwy skrawanej. Podstawiając do równania (18) zależność (14) otrzymano:

$$w_r[k_{rd}(1 - e^{-sT}) + sh_{er}] + w_t[k_{td}(1 - e^{-sT}) + sh_{et}] = -1/b_{lim} \quad (19)$$

A następnie po przekształceniach otrzymano układ równań w płaszczyźnie zespolonej:

$$\begin{aligned} Re: R_r k_{rd}(1 - \cos \varphi) - I_r(-k_{rd} \sin \varphi + \omega h_{er}) + \\ + R_t k_{td}(1 - \cos \varphi) - I_t(-k_{td} \sin \varphi + \omega h_{et}) = -1/b_{lim} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} Im: I_r k_{rd}(1 - \cos \varphi) + R_r(-k_{rd} \sin \varphi + \omega h_{er}) + \\ + I_t k_{td}(1 - \cos \varphi) + R_t(-k_{td} \sin \varphi + \omega h_{et}) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

gdzie $R_r = Re\{w_r\}$; $I_r = Im\{w_r\}$; $R_t = Re\{w_t\}$; $I_t = Im\{w_t\}$;
Część urojoną można zapisać jako:

$$A \sin \varphi - B \cos \varphi + C = 0 \quad (22)$$

gdzie: $A = -(R_r k_{rd} + R_t k_{td});$
 $B = I_r k_{rd} + I_t k_{td}$
 $C = R_r \omega h_{er} + R_t \omega h_{et} + I_r k_{rd} + I_t k_{td}$

Równanie (22) można przedstawić w postaci:

$$(A^2 + B^2) \cos^2 \varphi - 2BC \cos \varphi + (C^2 - A^2) = 0 \quad (23)$$

a jego pierwiastki jako:

$$\varphi = \arccos \left(-\frac{-2BC \pm \sqrt{4B^2 C^2 - 4(A^2 + B^2)(C^2 - A^2)}}{2(A^2 + B^2)} \right) \quad (24)$$

Podstawiając obie wyznaczone wartości φ do równania (20) opisującego część rzeczywistą wyznacza się graniczną szerokość warstwy skrawanej b_{lim} :

$$b_{lim} = \frac{-1}{R_r k_{rd}(1 - \cos \varphi) - I_r(-k_{rd} \sin \varphi + \omega h_{er}) + R_t k_{td}(1 - \cos \varphi) - I_t(-k_{td} \sin \varphi + \omega h_{et})} \quad (25)$$

Jeśli obie wartości b_{lim} są dodatnie, przyjmuje się niższą z nich wraz z odpowiadającą jej wartością przesunięcia fazowego φ , jeśli jedna jest ujemna, przyjmuje się tą dodatnią.

Numeryczne wyznaczanie worka matki

Metoda numeryczna pozwala na wykorzystanie równań (15-18) bezpośrednio, bez ich szczegółowego rozwiązywania analitycznego. Wychodzi się tu z równania (18) w postaci:

$$\mathbf{I} + b_{lim} \mathbf{W}_{MST} \mathbf{k} = 0 \quad (26)$$

oblicza wyznacznik, rozбивa na część rzeczywistą i urojoną oraz oblicza b i φ :

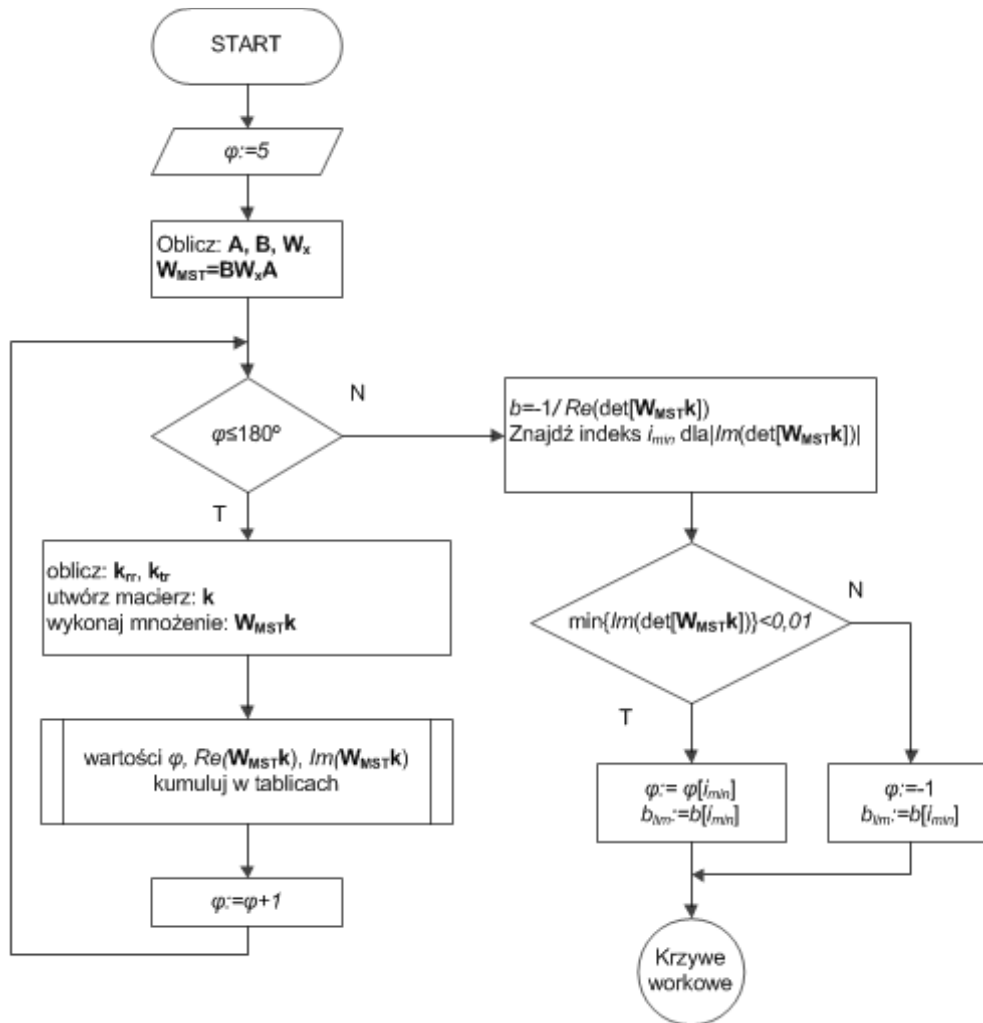
$$b(\varphi) = \frac{-1}{\text{Re}(\det[\mathbf{W}_{MST} \mathbf{k}])} \quad (27)$$

$$\varphi \in \langle 5^\circ; 180^\circ \rangle \text{ spełniające warunek } \text{Im}(\det[\mathbf{W}_{MST} \mathbf{k}]) = 0 \quad (28)$$

Rozwiązanie numeryczne polega na iteracyjnym poszukiwaniu takiego kąta fazowego $\varphi(\omega)$, dla którego spełnione jest równanie (28) z założoną dokładnością, a następnie na obliczeniu b_{lim} z równania (27):

Poszukiwanie $\varphi(\omega)$ oraz b_{lim} dla określonej częstości drgań przebiega wg następującego algorytmu:

Tak wyznaczone wartości φ oraz b_{lim} są przekazywane do algorytmu wyznaczania krzywych workowych.



Rys. 2. Algorytm wyznaczania φ oraz b_{lim} metodą numeryczną
 Fig. 2. Algorithm of φ and b_{lim} calculation using numeric method

2.4. WYZNACZANIE GRANICY STABILNOŚCI W FUNKCJI PRĘDKOŚCI OBROTOWEJ WRZECIONA

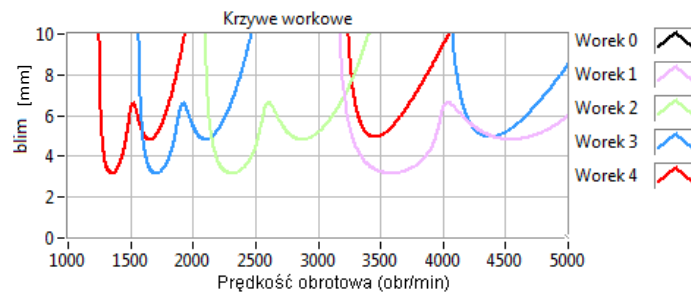
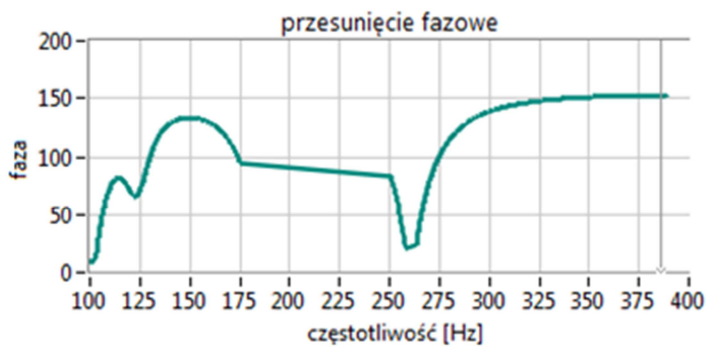
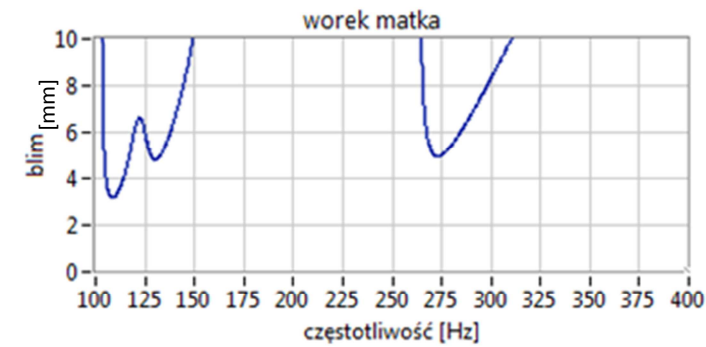
Na podstawie worka matki wyznaczana jest właściwa granica stabilności, czyli zależność granicznej głębokości skrawania od prędkości obrotowej wrzeciona obrabiarki. Kąt przesunięcia fazowego między zewnętrzną, a wewnętrzną modulacją grubości WS wyznaczony w poprzednim kroku jest jednocześnie geometrycznie związany z prędkością obrotową wrzeciona i częstotliwością drgań:

$$\varphi = 2\pi N - 60\omega/n \tag{29}$$

gdzie N – liczba fal (pełnych okresów drgań) między kolejnymi przejściami ostrza. Stąd:

$$n = \frac{60\omega/z}{2\pi N - \varphi} \tag{30}$$

Na rys. 4 przedstawiono sposób tworzenia granicy stabilności. Podstawiając do wzoru (30) kolejne wartości N uzyskano kolejne worki, które na rys. 4 zaznaczono różnymi kolorami. Następnie oblicza się obwiednię części wspólnej wszystkich worków. Jeśli obszary dwóch worków pokrywają się, to ten, którego granica jest wyżej zostaje wchłonięty.



Proces skrawania:

$$m_r=0,44;$$

$$C_r=523;$$

$$h_r=0,1\text{Ns/mm}^2$$

$$m_t=0,28;$$

$$C_t=1230;$$

$$h_t=0\text{Ns/mm}^2$$

Układ MDS:

$$m_{x11}=25\text{kg};$$

$$c_{x11}=2,4\text{Ns/mm}; k_{x11}=10\text{kN/mm}$$

$$m_{x12}=15\text{kg};$$

$$c_{x12}=2\text{Ns/mm};$$

$$k_{x12}=40\text{kN/mm}$$

$$m_{x21}=32\text{kg};$$

$$c_{x21}=3\text{Ns/mm};$$

$$k_{x21}=20\text{kN/mm}$$

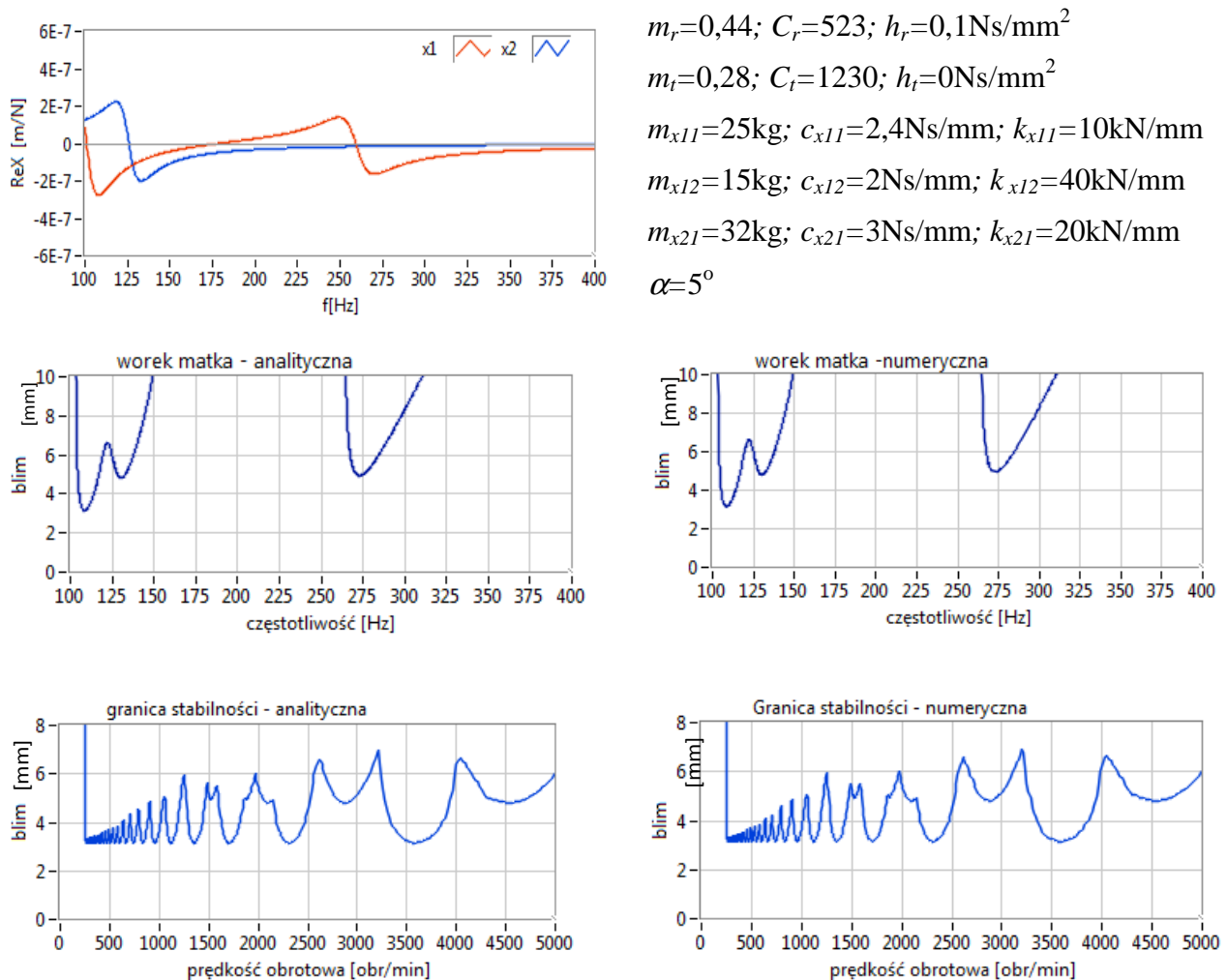
$$\alpha=5^\circ$$

Rys. 3. Tworzenie **granicy stabilności** na bazie worka matki.

Fig. 3. Creating stability lobes based on the base lobe

3. PORÓWNANIE WYNIKÓW ANALIZY STABILNOŚCI UZYSKANYCH METODĄ ANALITYCZNĄ I NUMERYCZNĄ.

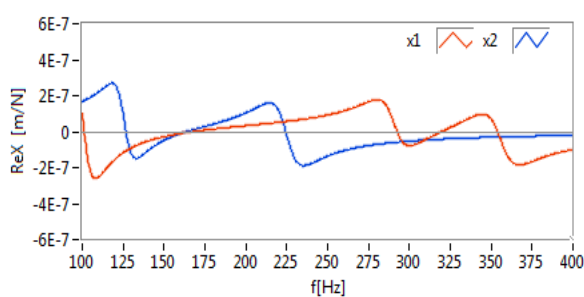
Metoda numeryczna podobnie jak metoda analityczna bazuje na macierzowym zapisie układu równań różniczkowych OUPN. Zaletą metody numerycznej jest łatwość uzyskania rozwiązania poprzez odpowiednie zakodowanie postaci macierzowej w dowolnym języku programowania, w tym wypadku w środowisku LabVIEW. W metodzie analitycznej złożoność zapisu matematycznego wyprowadzonych równań może prowadzić do błędów zarówno w trakcie wyprowadzania rozwiązania jak i kodowania. Stopień trudności rośnie wraz ze stopniem złożoności układ MDS. Z drugiej strony czas obliczeń w metodzie analitycznej jest znacznie krótszy niż w numerycznej, gdzie nie ma równania opisującego kąt przesunięcia fazowego (24), lecz poszukuje się go metodą kolejnych przybliżeń.



Rys. 4. Wyniki analizy stabilności dla dwóch mas modalnych na kierunku x_1 i jednej na kierunku x_2
 Fig. 4. Results of stability analysis for a two modal masses on the x_1 direction and a two modal masses on the x_2 direction

Warunkiem stosowalności metody numerycznej jest jej zadowalająca dokładność. Można ją ocenić porównując uzyskane wyniki z otrzymanymi analitycznie, traktowanymi, jako dokładne. Do tej oceny przyjęto zestawy danych testowych, w których badano wpływ współczynnika tłumienia procesu skrawania, kąta obrotu układu MST o dwóch stopniach swobody względem kierunku r . Przykłady uzyskanych wyników przedstawiono na rysunkach 5 i 6.

Na rys. 5 wykres pierwszy przedstawia przebieg części rzeczywistej częstotliwościowej funkcji przejścia (FRF) układu MST na kierunku x_1 i x_2 . Porównując worek matkę z tymi wynikami zaobserwować można znaną zależność częstotliwości drgań od minimów części rzeczywistej FRF, a przede wszystkim łatwo zidentyfikować postaci drgań odpowiedzialne za niestabilność układu. Warto podkreślić, że dla tak dobranych parametrów wpływ na kształt worka matki mają drgania zarówno na kierunku x_1 i x_2 . Kształt krzywych workowych ma zasadniczy wpływ na granicę stabilności, której minima nie leżą na jednym poziomie, ale są zależne od minimów worka matki. Inny przypadek pokazano na rys. 5 – dla trzech mas na kierunku x_1 i dwóch mas na kierunku x_2 . Z krzywej workowej można wnioskować, że tym razem główny wpływ na kształt worka matki mają wpływ masy z kierunku x_1 . A konsekwencje tak złożonego kształtu worka matki można obserwować na złożonym kształcie przebiegu granicy stabilności.



$$m_r=0,44; C_r=523; h_r=0,1\text{Ns/mm}^2$$

$$m_l=0,28; C_l=1230; h_l=0\text{Ns/mm}^2$$

$$m_{x11}=25\text{kg}; c_{x11}=2,4\text{Ns/mm}; k_{x11}=10\text{kN/mm}$$

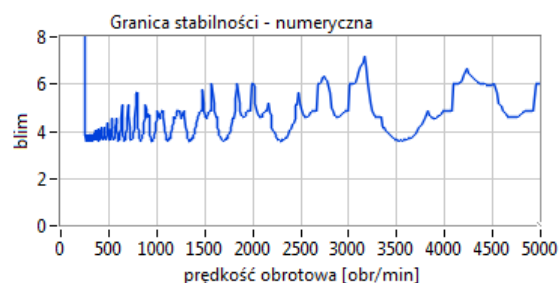
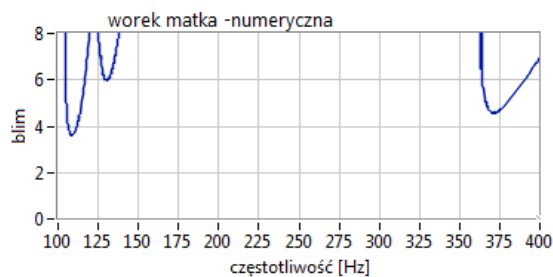
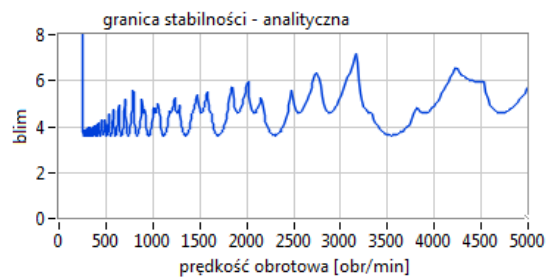
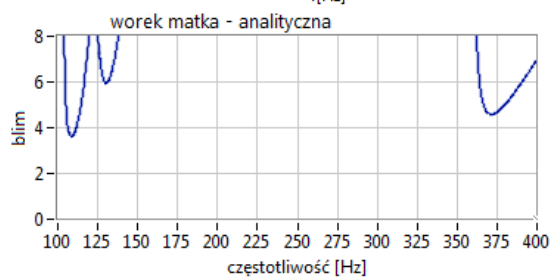
$$m_{x12}=15\text{kg}; c_{x12}=2\text{Ns/mm}; k_{x12}=50\text{kN/mm}$$

$$m_{x13}=10\text{kg}; c_{x13}=1,5\text{Ns/mm}; k_{x13}=50\text{kN/mm}$$

$$m_{x21}=32\text{kg}; c_{x21}=3\text{Ns/mm}; k_{x21}=20\text{kN/mm}$$

$$m_{x22}=15\text{kg}; c_{x22}=2\text{Ns/mm}; k_{x22}=30\text{kN/mm}$$

$$\square = \mathfrak{S}$$



Rys. 5. Wyniki analizy stabilności dla trzech mas modalnych na kierunku x_1 i dwóch na kierunku x_2
Fig. 5. Results of stability analysis for a three modal masses on the x_1 direction and a two modal masses on the x_2 direction

Otrzymane wyniki dla metody analitycznej i numerycznej są porównywalne zarówno dla worka matki jak i dla granicy stabilności. Wykresy dla metody numerycznej nie są tak gładkie jak dla metody analitycznej, co wynika bezpośrednio z iteracyjnej metody poszukiwania wyniku granicy stabilności. Na obecnym etapie prac trudno prognozować, która metoda obliczeniowa będzie użyteczniejsza w dalszych badaniach. Chcąc robić obliczenia dla większej liczby stopni swobody, czy dla frezowania należy spodziewać się, że rozwiązanie układów równań będzie jeszcze bardziej pracochłonne, szczególnie dla rozwiązania analitycznego. Przy rozwiązaniu numerycznym kodowanie aplikacji może być łatwiejsze, ponieważ używany język programowania potrafi rozwiązywać macierze. Trudno jednak przewidzieć, jakie będą potrzebne moce obliczeniowe komputerów dla obu metod i która będzie skuteczniejsza w generowaniu pożądaných wyników.

4. PODSUMOWANIE

Z porównania przeprowadzonych analiz wynika, że metoda numeryczna jest mniej dokładna od analitycznej. Podczas gdy dla metody analitycznej obliczenia trwają około jednej sekundy, to czas obliczeń metodą numeryczną trwa od kilku do kilkudziesięciu sekund, w zależności od ilości parametrów wejściowych – ilości mód. Jednakowoż zastosowanie zapisu macierzowego równań różniczkowych dla układów o większej liczbie swobody jest prostsze w porównaniu do rozwiązania równań metodą analityczną.

Kolejny etap, będący kontynuacją prac, będzie obejmował opracowanie oprogramowania do analitycznego/numerycznego wyznaczania granicy stabilności dla układów o dwóch stopniach swobody podczas toczenia nieswobodnego oraz frezowania a także jego weryfikację i porównanie z metodami symulacyjnymi.

Badania realizowane w ramach Projektu "Nowoczesne technologie materiałowe stosowane w przemyśle lotniczym", Nr POIG.01.01.02-00-015/08-00 w Programie Operacyjnym Innowacyjna Gospodarka (PO IG). Projekt współfinansowany przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego.

LITERATURA

- [1] ALTINTAS Y., 2000, *Manufacturing Automation*, Cambridge University Press.
- [2] MARCHELEK K., 1991, *Dynamika obrabiarek*, WNT.
- [3] VELA-MARTÍNEZ L., i in., 2008, *Analysis of compliance between the cutting tool and the workpiece on the stability of a turning proces*, International Journal of Machine Tools & Manufacture 48.
- [4] CHENG K, BUDAK E. i in., 2009, *Machining Dynamics*, Springer-Verlag.
- [5] JEMIELNIAK K., 1992, *Analiza stabilności dynamicznego układu OUPN*, Archiwum Technologii Budowy Maszyn, Zeszyt 10.
- [6] JEMIELNIAK K, 1990, *Analityczno - doświadczalny model dynamicznej charakterystyki procesu skrawania przy toczeniu nieswobodnym*, Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Mechanika, 126.
- [7] EYNIAN M., ALTINTAS Y., 2009, *Chatter Stability of General Turning Operations With Process Damping*, Journal of Manufacturing Science and Engineering, Vol. 131.
- [8] JEMIELNIAK K., 1992, *Modelling of Dynamic Cutting Coefficients in Three - Dimensional Cutting*, Int. J. Mach. Tools Manufact, 32/4, 509-519.

ANALYTICAL AND NUMERICAL DETERMINATION OF THE BORDER
OF STABILITY IN TURNING

The paper introduces a comparison of methods of stability analysis for the systems of “machine tool - holder - workpiece – tool” with two degrees of freedom. It discusses calculation methods and describes the findings from testing methods for software built on different types of algorithms. It proves that the biggest advantage of the analytical method is the speed of the algorithm while the disadvantage the degree of complexity for the system with a higher number of degrees of freedom. In turn, the higher number of degrees of freedom is easier to render in calculation by the application of the numerical method owing to the universality of the matrix transcription. The downside of the numerical method in comparison to the analytical one is its increased time inefficiency.